Material Didático de Apoio

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DOS LIMITES

1.1 INTRODUÇÃO

O limite observa o comportamento de uma função $f(x)$quando x tende a a.

Considere a função $f(x) = x + 4$. Se montarmos uma tabela com valores se aproximando de $f(1)$ pela esquerda e pela direita, vamos observar que quanto mais x tende para 1, mais $f(1)$ tende para 5.

x	$f(x) = x + 4$
1,2	5,2
1,1	5,1
1,05	5,05
1,03	5,03
1,01	5,01

x	$f(x) = x + 4$
0,5	4,5
0,7	4,7
0,85	4,85
0,95	4,95
0,99	4,99

Observe que à medida que x tende a 1 $(x \to 1)$, $f(x)$ tende a $f(1)(f(x) \to f(1))$.

Portanto, o limite de $f(x)$ quando $x \to 1$ é 5. O limite de $f(x)$ quando x tende a a não depende do valor que $f(x)$ assume em a, mas sim dos valores próximos a $f(a)$. Por isso, diz-se que limite é um conceito local.

A fórmula do limite quando a função é contínua no ponto a é: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$, sendo que $f(a) = L$.

1.2. SIMBOLOGIA OU NOTAÇÃO

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Lê-se que a função $y = f(x)$ tem limite L quando x se aproxima (ou tende) de a.

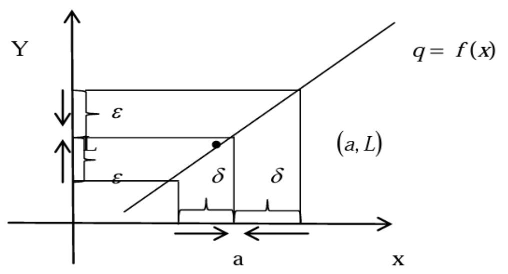
Obs.: O limite de uma função $y = f(x)$ quando x se aproxima de a é único.

A função $q = f(x)$ tem limite L quando x se aproxima de a , o que se denota por:

$f(x) = y$

$\lim_{x \to a} f(x) = L$

$\lim_{x \to a} q = L$



Quando x tende a a; $f(x)$ tende a L.

Se podemos fazer o valor de $f(x)$ tão próximo do nº L quanto quisermos tomando x suficientemente próximo (mas não igual) a a.

1.3. PROPRIEDADES DE LIM ITES

$\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L_2$

1.3.1. SOMA OU SUBTRAÇÃO

$$\boxed{\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2}$$

Ex: $\lim_{x \to 1} (5x^4 - 2) = \lim_{x \to 1} 5x^4 - \lim_{x \to 1} 2 = 5(1)^4 - 2 = 3$

1.3.2. MULTIPLICAÇÃO

$$\lim_{x \to a} f(x) * g(x) = \lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x) = L_1 * L_2$$

Ex: $\lim_{x \to 1} x^2 * e^x = \lim_{x \to 1} x^2 * \lim_{x \to 1} e^x = (1)^2 * e^1 = e$

1.3.3. DIVISÃO

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$, desde que $L_2 \neq 0$

Ex: $\lim_{x \to 4} \left[\frac{x^2+3x}{x+3}\right] = \frac{\lim_{x \to 2}(x^2+3x)}{\lim_{x \to 2}(x+3)} = \frac{(2)^2+3(2)}{2+3} = \frac{4+6}{5} = \frac{10}{5} = 2$

1.3.4. MULTIPLICAÇÃO POR UMA CONSTANTE

$$\lim_{x \to a} Kf(x) = K \lim_{x \to a} f(x) = K * L_1$$

1.4. CASOS DE SUBSTITUIÇÃO DIRETA

Exemplos de limite em funções contínuas (substitui o valor)

a) $\lim_{x \to 2} x^2 + 2 = (2)^2 + 2 = 4 + 2 = 6$
b) $\lim_{x \to 1} x + 3x = 1 + 3(1) = 4$
c) $\lim_{x \to 0} e^x = e^0 = 1$
d) $\lim_{x \to 2} 3 = 3$

1.5. CASOS EM QUE A SUBSTITUIÇÃO DIRETA NÃO É POSSÍVEL

São casos em que a função não é definida no valor que estamos considerando no cálculo do limite.

Necessidade de reescrever a função usando artifícios matemáticos.

Deve-se substituir a função dada por outra mais apropriada que assuma os mesmos valores que a função original em todos os pontos, exceto em $x = a$.

Também chamadas de formas indeterminadas do tipo $\frac{0}{0}$. Nestes casos, deve-se reescrever a função de outra forma visando simplificar para que se possa cair no caso da substituição direta. Para atingir o objetivo da substituição direta pode-se usar:

- Colocação em evidência
- Produtos notáveis
- Raízes de funções quadráticas
- Fatoração de Polinômios
- Multiplicação, etc.

Revisão: Lembrando que existem funções que precisam ser reescritas de outra forma para que depois ocorra a substituição pelo valor. Relembrando produtos notáveis:

$$(x^2 + a^2) = (x + a)(x - a)$$
$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$
$$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

- Por fatoração:

a) $\lim_{x \to 3} \frac{(x^3 + 2x^2 - 9x - 18)}{(x - 3)}$

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^3} + 2x^2 - 9x - 18 & x - 3 \\
\underline{-\cancel{x^3} + 3x^2} & \overline{x^2 + 5x + 6} \\
\quad \cancel{5x^2} - 9x - 18 & \\
\quad \underline{-\cancel{5x^2} + 15x} & \\
\qquad \cancel{6x} - 18 & \\
\qquad \underline{-\cancel{6x} + 18} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

$$(x-3)*(x^2+5x+6) = x^3+2x^2-9x-18$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+5x+6)*\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}} = \lim_{x\to 3} x^2+5x+6 = (3)^2+5(3)+6 = 9+15+6 = 30$$

b) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1} x+1 = 1+1 = 2$$

- Achando as raízes usando Báskara e colocando na forma $(x-x_1)*(x-x_2)$, onde x_1 e x_2 são raízes da equação.

➢ ATENÇÃO ao jogo de sinal.

a) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{x+3}$

Achando as raízes:

$x^2+5x+6=0$

$x = \frac{-5\pm\sqrt{25-4*(1)*(6)}}{2} = \frac{-5\pm\sqrt{25-24}}{2} = \frac{-5\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{-5\pm 1}{2}$

$x_1 = \frac{-5+1}{2} = -2 \qquad x_2 = \frac{-5-1}{2} = -3$

$$(x-x_1)*(x-x_2)$$

$$(x-(-2)*(x-(-3))$$

$$(x+2)*(x+3)$$

Logo, $\lim_{x\to -3}\frac{x^2+5x+6}{x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{(x+2)*\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}} = -3+2 = -1$

- Por multiplicação

a) $\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)}{x-1}$

$\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)}{x-1} * \frac{(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{(x-1)*(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

1.6. LIMITES DE FUNÇÕES COMPOSTAS

Dada $g(f(x))$. Considere $\lim_{x \to p} f(x) = a$

Fazendo: $f(x) = u \rightarrow$ Artifício

$$\lim_{x \to p} g\big(f(x)\big) = \lim_{u \to a} g(u)$$

Exemplos:

1) Calcular $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2} + 5$ usando os conhecimentos de função composta:

$$u = x^2 + 5$$

$\lim_{x \to 2} u \rightarrow \lim_{x \to 2} x^2 + 5 = 2^2 + 5 = 4 + 5 = 9$

Então $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2} + 5 = \lim_{\mathrm{u} \to 9} \sqrt{\mathrm{u}} = \sqrt{9} = 3$

2) Calcular $\lim_{x \to 4} \sqrt{\frac{x^2-16}{x-4}}$

$u = \frac{x^2-16}{x-4} \rightarrow \lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4} \rightarrow \lim_{x \to 4} \frac{(x+4)*(x-4)}{(x-4)} = \lim_{x \to 4} x + 4 = 4 + 4 = 8$

$\lim_{u \to 8} \sqrt{u} = \sqrt{8}$ ou $2\sqrt{2}$

1.7. LIMITES NO INFINITO

Limite de uma função no Infinito

$$\boxed{\lim_{X \to \infty} f(x) = L}$$

A função f tem limite L quando x cresce além de qualquer limite (ou quando x tende ao infinito). Então podemos fazer que f(x) se aproxime arbitrariamente de L tomando x suficientemente grande.

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = M}$$

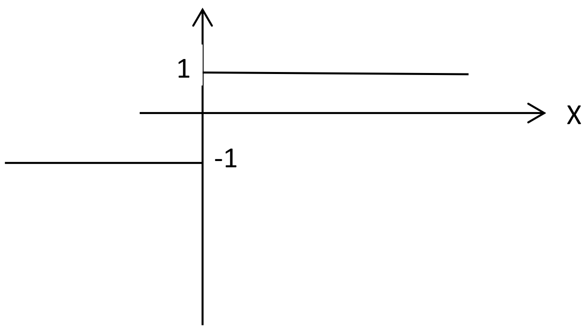
A função f tem limite M quando x decresce além de qualquer limite (ou quando x tende a menos infinito). Então podemos fazer que $f(x)$ se aproxime arbitrariamente de M tomando x negativo e suficientemente grande em valor absoluto.

- **Exemplo**

$$f(x) = \begin{cases} -1 \; se \; x < 0 \\ +1 \; se \; x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$$



- **Propriedade para o limite no infinito**

Para todo $n > 0$, temos $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ e $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ desde que $\frac{1}{x^n}$ esteja definido.

Condição: n seja inteiro e positivo.

Para calcular o limite de uma função racional no infinito deve-se dividir o numerador e o denominador da expressão por x^n, onde n é a maior potência **presente no denominador da expressão.**

Observe que os limites do numerador e do denominador não existem quando $x \to \infty$.

- **Exemplos:**

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x + 3}{2x^3 + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 - x + 3}{x^3}}{\frac{2x^3 + 1}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3} + \frac{3}{x^3}}{\frac{2x^3 + 1}{x^3}} = \frac{0 - 0 + 0}{2 + 0} = \frac{0}{2} = 0$

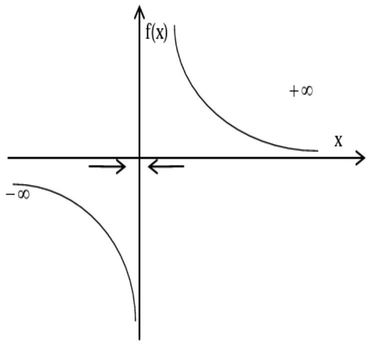
b) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+8x-4}{2x^2+4x-5} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2+8x-4}{x^2}}{\frac{2x^2+4x-5}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{8x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{5}{x^2}} = \frac{3+0-0}{2+0-0} = \frac{3}{2}$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x+5}{2x^2+3x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2+2x+5}{x^2}}{\frac{2x^2+3x+2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}} = \frac{4+0+0}{2+0+0} = 2$

d) $\lim_{x\to\infty}\frac{10x^3+2x^2+7x}{4x^2+2x^3+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{10x^3+2x^2+7x}{x^3}}{\frac{4x^2+2x^3+3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{10x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}+\frac{7x}{x^3}}{\frac{4x^2}{x^3}+\frac{2x^3}{x^3}+\frac{3}{x^3}} = \frac{10+0+0}{0+2+0} = \frac{10}{2} = 5$

1.8. LIMITES LATERAIS

$\mathbf{lim}_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$ $\mathbf{lim}_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$

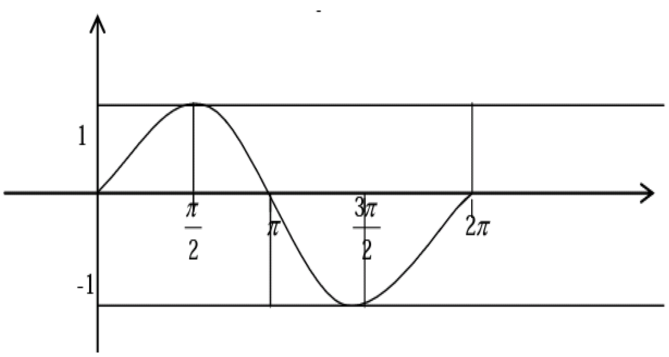


1.9. LIMITES E AS FORMAS TRIGONOMÉTRICAS

Lembrando.

Sen = função seno ⇒ $y = senx$

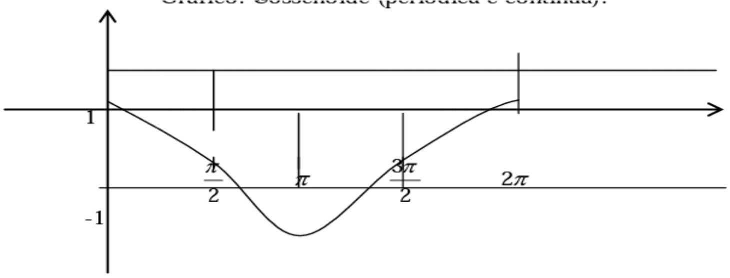
Gráfico: Senóide (periódica e contínua).



$x \rightarrow$	$\lim senx$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$+1$
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0

Obs.: Observar onde a senóide passa, lembrando que a imagem do sen=[-1;1].

Cos= função cosseno $\longrightarrow y = \cos x$
Gráfico: Cossenóide (periódica e contínua)



$x \rightarrow$	$\lim \cos x$
0	$+1$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	$+1$

1.10. APLICAÇÃO PRÁTICA EM ECONOMIA [A.P.E]

- **Funções de Custo Médio**

EX_1: A Custom Office fabrica uma linha de mesas para executivos. Estima-se que o custo total da fabricação de x mesas de certo modelos é de $C(x) = 100x + 200.000$ dólares por ano, de modo que o custo médio da fabricação de x mesas é dado por $\bar{C} = \frac{c(x)}{c} = \frac{100x+200.000}{x} = 100 + \frac{200.000}{x}$ dólares por mesa. Calcule $\lim_{x\to\infty} \bar{C}(x)$ e interprete os resultados.

$$\lim_{x\to\infty} \bar{C}(x) = \lim_{x\to\infty} \left(100 + \frac{200.000}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 100 + \lim_{x\to\infty} \frac{200.000}{x} = 100$$

Interpretação: quando o nível do produto cresce o custo médio se aproxima de \$100 por mesa.

O resultado que obtivemos é esperado se considerarmos suas implicações econômicas. Observe que, à medida que o nível de produção cresce, o custo fixo por mesa produzida, representado pelo termo ($200.000/x$), diminui. O custo médio se aproxima de um valor constante por unidade produzida – neste caso \$100.

EX_2: O custo médio por disco (em dólares) que a Herald Records tem ao fabricar x CDs de áudio é dado pela função custo médio $\bar{C} = 1{,}8 + \frac{3.000}{x}$. Calcule $\lim_{x\to\infty} \bar{C}(x)$ e interprete os resultados.

$$\lim_{x\to\infty} \bar{C}(x) = \lim_{x\to\infty}\left(1{,}8 + \frac{3.000}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1{,}8 + \lim_{x\to\infty}\frac{3.000}{x} = 1{,}8$$

Interpretação: à medida que a produção de CDs cresce "além de qualquer limite", o custo médio diminui e se aproxima de \$1,8 por disco.

ANEXO

CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

Condições para uma função ser contrínua:

(1) O ponto precisa estar no domínio da função.
(2) A função precisa ter um limite quando $x \to a$
(3) Esse limite precisa ser igual a $f(a)$

IMPORTANTE: A continuidade de uma função é uma condição necessária (CN) para a sua diferenciabilidade.

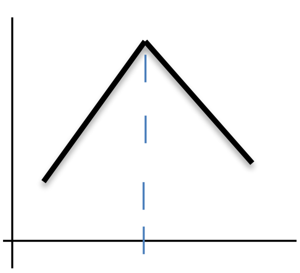
Dada uma função primitiva $y = f(x)$ e se q representa quociente diferenciável $\Delta y/\Delta x$, e v a grandeza de Δx, então o fato de que $\lim_{v\to 0} q$ exista (em $x = x_0$) significará que a derivada dy/dx existe.

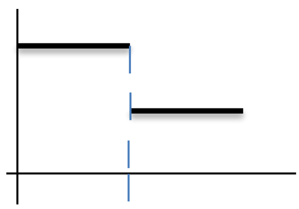
Neste caso a função $y = f(x)$ é diferenciável no ponto $(x = x_0)$. Sendo o processo de obtenção da derivada dy/dx chamado de diferenciação.

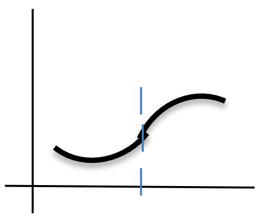
Graficamente: uma função contínua possui um gráfico que pode ser traçado sem que o “lápis” ou “caneta” sejam levantados do papel.

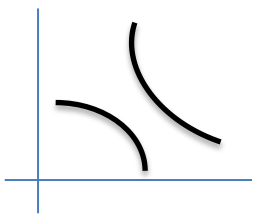
Uma função contínua não apresenta “falhas” em seu gráfico.

Exemplos de gráficos de funções não contínuas .









Uma função $f(x)$ é contínua em $x = a$, desde que a seguinte igualdade seja verdadeira:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

Exercícios propostos

1. Calcular os seguintes limites utilizando as propriedades:

   a) $\lim_{x\to 2} x^3$
   b) $\lim_{x\to 3} x$
   c) $\lim_{x\to 1}(1 - 2x^2)$
   d) $\lim_{x\to 1}(2x^3 - 3x^2 + x + 2)$
   e) $\lim_{s\to 0}(2s^2 - 1) * (2s + 4)$

2. Considere as seguintes funções:
   $f(x) = x + 3$ e $g(x) = x - 1$

Achar:

a) $\lim_{x\to 2} f(x) + g(x)$
b) $\lim_{x\to 2} f(x) - g(x)$
c) $\lim_{x\to 2} f(g(x))$

3. Calcular os limites a seguir:

   a) $\lim_{x\to 2} x^2 + 4x + 2$
   b) $\lim_{x\to 0} 2^x$
   c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - x}{x}$
   d) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
   e) $\lim_{x\to 4} \frac{x - 4}{x^2 - 16}$

4. Calcular os seguintes limites:

   a) $\lim_{x\to 2} \frac{4(x^2 - 4)}{x - 2}$
   b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x}{x}$
   c) $\lim_{x\to \infty} 5 + x$

d) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^2 + 2x + 4}$

Referências Bibliográficas

BIANCHINI, Edwaldo; PACCOLA, Herval. **Matemática**. São Paulo: Moderna, 1989.

BRAGA, Márcio B.; KANNEBLEY Jr., Sérgio; ORELLANO, Verônica I. F. **Matemática para Economistas**. São Paulo: Atlas, 2003.

CHIANG, Alpha C.; WAINWRIGHT, Kelvin**. Matemática para Economistas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

CHIANG, Alpha. **Matemática para Economistas**. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.

CRUM, W. L.; SCHUMPETER, Joseph A. **Elementos de Matemática para Economistas e Estatísticos**. Rio de Janeiro: Editora Fundo de Cultura, 1969.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes. **Análise I**. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

GOLDSTEIN, Larry J.; LAY, David C.; SCHNEIDER, David I. **Matemática Aplicada: economia, administração e contabilidade**. Porto Alegre: Bookman, 2000.

MEDEIROS DA SILVA, Sebastião. **Matemática para os Cursos de Economia, Administração e Ciências Contábei**s. 6. ed. Vol. 1. São Paulo: Atlas, 2010.

MEDEIROS DA SILVA, Sebastião. **Matemática para os Cursos de Economia, Administração e Ciências Contábei**s. 5. ed. Vol. 2. São Paulo: Atlas, 2008.

MUROLO, Afrânio Carlos; BONETTO, Giácomo. **Matemática Aplicada a Administração, Economia e Contabilidade**. 2. ed. rev. e ampl. – São Paulo: Cengage Learning, 2012.

SILVA, Luiza Maria Oliveira; MACHADO, Maria Augusta Soares. **Matemática Aplicada à Administração, Economia e Contabilidade**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

TAN, S. T. **Matemática Aplicada a Administração e Economia**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.

VERAS, Lília L. **Matemática Aplicada à Economia**. São Paulo: Atlas, 2011.

WAGNER, Eduardo. **Matemática**. - Rio de Janeiro: Editora FGV, 2011.