INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE FUNÇÕES

1. INTRODUÇÃO

São dados 2 conjuntos A e B. Uma função de A em B consiste em alguma regra que permita associar, a cada elemento de A, um único elemento de B.

f : A→B (função f de A em B)

Ex.:

$y = f(x)$

Ex. Econômico (APE):

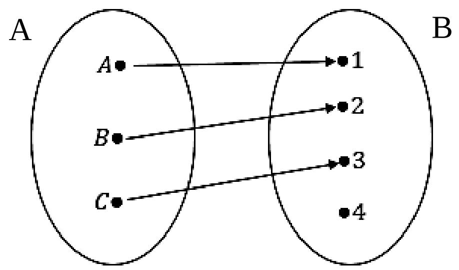
Função Demanda: $Q_d = f(q)$

Função Oferta: $Q_o = f(q)$

Função Consumo: $C = f(y)$

Função Investimento: $I = f(i)$

- Diagrama de Flechas



Obs.: informações básicas

Domínio: formado pelo conjunto A = {a, b, c}; D (f)

Contra Domínio: formado pelo conjunto B = {1, 2, 3, 4}

Imagem: formado por alguns elementos do conjunto B = {1, 2, 3}; Im (f)

Obs.: Funções Reais

f : ℝ → ℝ (o domínio e o contra domínio são subconjuntos dos números reais)

Ex. típico

$y = f(x)$ → Funções de 1 variável

Valores de x→ domínio→ eixo horizontal→ abscissa

Valores de y→ imagem → eixo vertical→ ordenada

- Par Ordenado

Ex.: (x; y)

APE: (q; p)

- Gráfico Cartesiano

Ex.: $f(x) = y = x + 2$

$f(1) = y = 1 + 2 = 3$

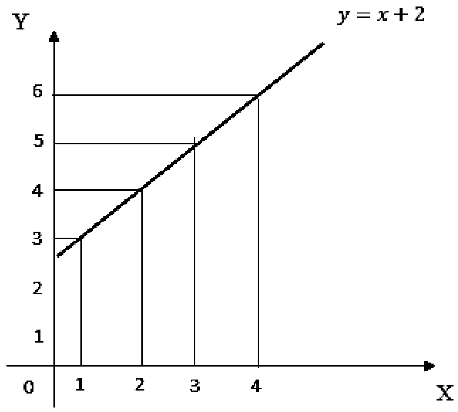
$f(2) = y = 2 + 2 = 4$

$f(3) = y = 3 + 2 = 5$

$f(4) = y = 4 + 2 = 6$

x	y
1	3
2	4
3	5
4	6

As funções podem ser representadas graficamente. Para que isso seja feito, utilizamos duas coordenadas, que são x e y.

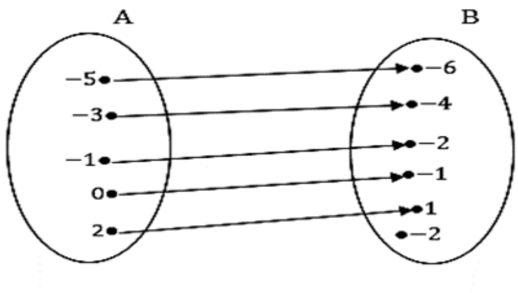


2. CLASSIFICAÇÃO DAS FUNÇÕES

2.1. Função Injetora

f: A→B é injetora se para quaisquer x_1 *e* x_2 pertencentes a A com $x_1 \neq x_2$ houver $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Ex.: $f(x) = x - 1$ *ou* $y = x - 1$



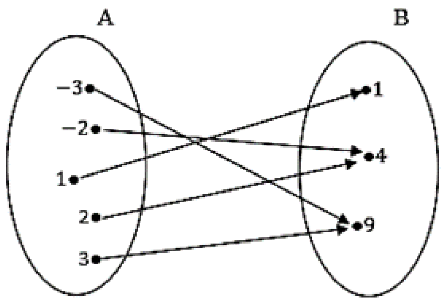
Outro exemplo: $y = -2x$

Universidade Federal de Sergipe – Curso de Economia
Prof. Msc. Patrícia Pugliese Carneiro
Material Didático de Apoio

2.2. Função Sobrejetora

f: A→B é sobrejetora se, para qualquer elemento o contradomínio existe um elemento do domínio.

Ex.: $f(x) = x^2 \;\; ou \; y = x^2$



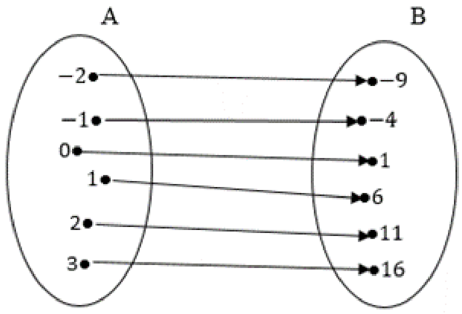
Outro exemplo: $y = \frac{1}{x}$

2.3. Função Bijetora

f: A→B é bijetora, se ela for Injetora e Sobrejetora simultaneamente.

Ex.: $f(x) = 5x + 1 \;\; ou \;\; y = 5x + 1$

X	Y
–2	–9
–1	–4
0	1
1	6
2	11
3	16



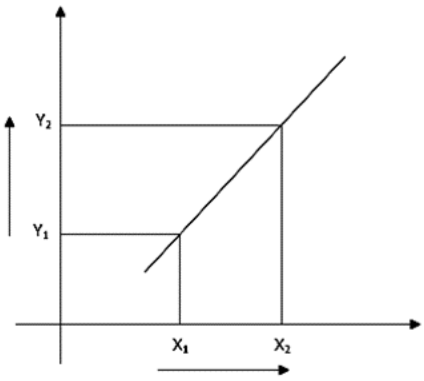
Obs:

- Cada elemento do conjunto A só se corresponde com um elemento do conjunto B.
- Todos os elementos do conjunto A se corresponde com um elemento do conjunto B. Não sobra elementos em B.
- Contradomínio = Imagem

3. COMPLEMENTOS ELEMENTARES

3.1. Função Crescente

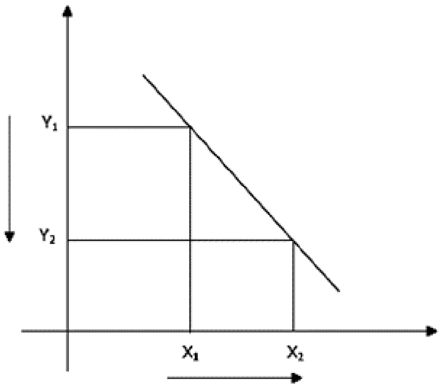
Quando os valores de *x* aumentam, os valores de *y* também aumentam (reta positivamente inclinada): $x_2 > x_1$ e $y_2 > y_1$.



APE: Gráfico da Função Oferta (ΔP↑→ ΔQ↑)

3.2. Função Decrescente

Quando os valores de x aumentam, os valores de y diminuem (reta negativamente inclinada): $x_2 > x_1$ e $y_2 < y_1$



APE: Gráfico da Função Demanda. (ΔP↑→ ΔQ↓)

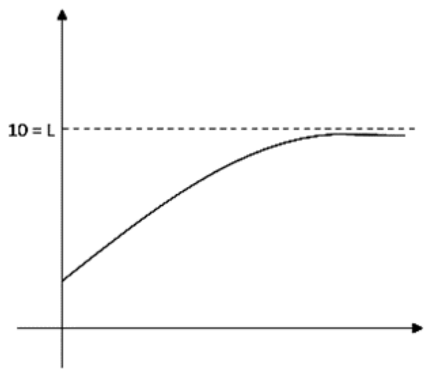
3.3. Função Limitada (Obs.: Limites Máximos e Mínimos)

Subtipos:

3.3.1. Limitada Superiormente

$f(x) \leq L$; qualquer que seja x. Quando existe algum valor Limite, que não é superado por nenhum valor da função.

Ex.: $R = -\frac{10}{x+5} + 10$

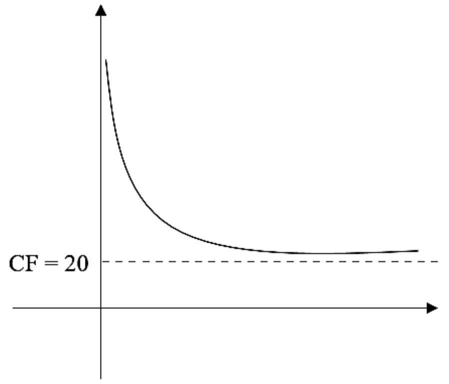


APE: Gráfico da Função Receita

3.3.2. Limitada Inferiormente

$f(x) \geq L$; qualquer que seja x. Quando existe algum valor de L que seja menor ou igual a qualquer outro valor atingido pela função.

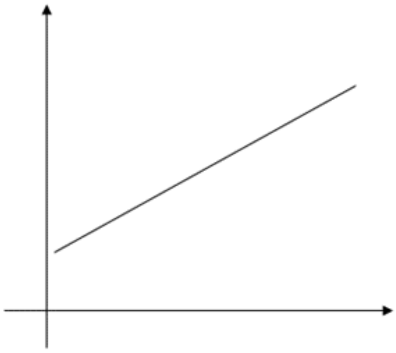
Ex.: $CMe = \frac{120}{q} + 20$ (Obs.: CF = 20)



APE: Gráfico da Função Custo Médio.

3.4. Função Contínua

Quando ela é continua em todos os pontos do seu domínio. O gráfico não possui interrupções (nem saltos).

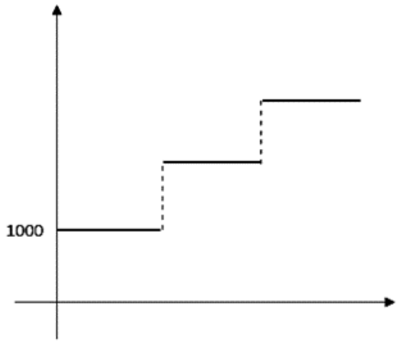


APE: Função Oferta.

3.5.Função Descontínua

O gráfico possui interrupções, "saltos".

Ex.: $M = 1000 + 50n$

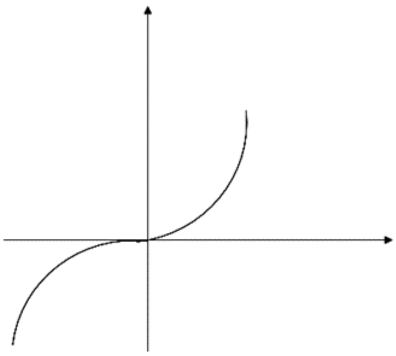


APE: Gráfico de uma Função Montante (juros simples).

3.6. Função Inversa (f^{-1})

Se $y = f(x)$ também puder ser escrita outra função, $x = g(y)$; então f e g são inversas.

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x) \\ x &= g(y) \end{aligned}\right\} \text{Funções Explícitas} \qquad F(x; y) = 0 \; \Big\} \text{Função Implícita}$$



Passos:

(1) Substituir $f(x)$ por y;
(2) Troca x por y e vice-versa;
(3) Isola e encontra o valor de y;
(4) Substituir y por $f^{-1}(x)$.

Ex.: Dado f(x)=1/(x+1)

(1) $y = \frac{1}{x+1}$

(2) $x = \frac{1}{y+1}$

(3) $x(y+1) = 1$

$xy + x = 1$

$xy = 1 - x$

$y = \frac{1-x}{x}$

(4) ($\therefore$)

$$f(x)^{-1} = \frac{1-x}{x}$$

APE: $q = -5p + 100$

$F(q; p) = 5p + q - 100 = 0$

$$p = \frac{-q+100}{5} \ ou \ p = -\frac{q}{5} + \frac{100}{5} \ ou \ p = -\frac{q}{5} + 20$$

Obs.: São gráficos simétricos em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

3.7. Função Composta

Dadas 2 funções: $f(x)\ e\ g(x)$.

Obs.:

$f[g(x)] \rightarrow fog(x)$

$g[f(x)] \rightarrow gof(x)$

$f[f(x)] \rightarrow fof(x)$

$g[g(x)] \rightarrow gog(x)$

Ex.: Dada as funções$f(x) = x + 1\ e\ g(x) = 2x + 1$. Achar $fog(x)\ ou\ f[g(x)]$.

$f(x) = x + 1$

$f[g(x)] = g(x) + 1$

$f[g(x)] = (2x + 1) + 1$

$f[g(x)] = 2x + 2$

Ex.: Dadas as funções $f(x) = x - 6\ e\ g(x) = -x^2 + 1$. Achar a função composta: $gof(x)\ ou\ g[f(x)]$.

$g[f(x)] = -(f(x))^2 + 1$

$g[f(x)] = -(x - 6)^2 + 1$

$g[f(x)] = -(x^2 - 12x + 36) + 1$

$g[f(x)] = -x^2 + 12x - 36 + 1$

$g[f(x)] = \ -x^2 + 12x - 35$

4. FUNÇÃO POLINOMIAL

4.1. Função do Primeiro Grau (Função Afim)

São funções polinomiais do primeiro grau, o expoente de *x* na função é igual a 1. Nessa função, o gráfico é uma reta.

Ex.: $f(x) = y = ax + b$

Onde:

- a é o coeficiente angular do gráfico de *f* ;
- b é o coeficiente linear, ou ponto de intersecção com o eixo *y*;
- x é a variável independente.

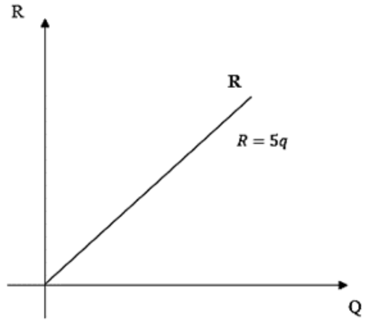
Obs.:

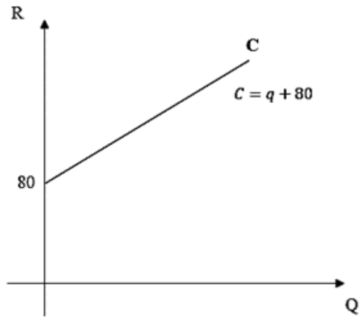
- Uma função afim é crescente se a > 0;
- Uma função afim é decrescente se a < 0;

APE: Função Receita e Função Custo (break even point)

Ex.: $R = 5q; \quad C = q + 80$

Gráficos da Função Receita e Função Custo





Break Even Point: R = C

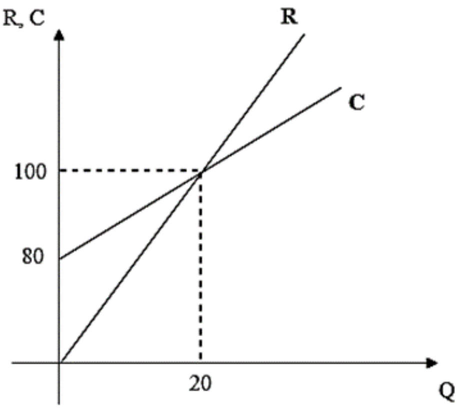
$5q = q + 80$

$5q - q = 80$

$4q = 80$

$q = \frac{80}{4} = 20$

$R = 5(20) = 100 = C$



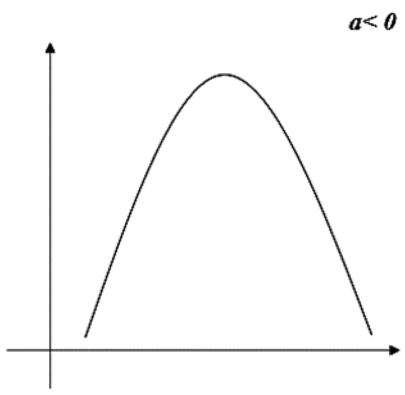
4.2. Função do Segundo Grau (Função Quadrática)

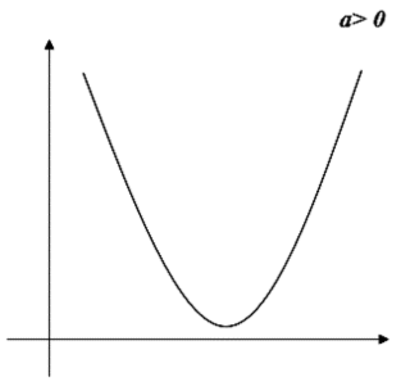
Chama-se função quadrática, ou função polinomial do 2º grau, qualquer função *f* de ℝ em ℝ dada por uma lei da forma **f(x) = ax² + bx + c**, onde a, b e c são números reais e a ≠ 0.

O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, é uma curva chamada parábola.

Obs: Ao construir o gráfico de uma função quadrática, notaremos sempre que:

- Se *a> 0*, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- Se *a< 0*, a parábola tem a concavidade voltada para baixo;





APE: Função Custo Médio (CMe); Função Custo Marginal (CMg)

$$CT = 2q^3 - 40q^2 - 220$$

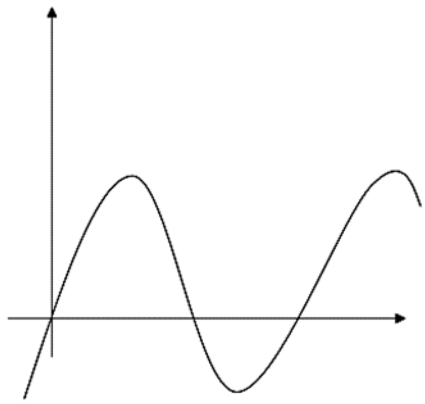
$$CMe = \frac{CT}{q} = 2q^2 - 40q - 220$$

$$CMg = 6q^2 - 80q - 220$$ [1]

4.3. Função do Terceiro Grau (Função Cúbica)

Chama-se função cúbica, ou função polinomial do 3º grau, qualquer função de *f* de ℝ em ℝ dada uma lei da forma **f(x) = ax³ + bx² + cx + d**, onde:

- "*a*", "*b*", "*c*" e "*d*" são os coeficientes, sendo o "*d*" nomeado de termo independente;
- "*x*" é a variável independente da função.



APE: $CT = 2q^3 - 40q^2 - 220$

5. FUNÇÃO EXPONENCIAL

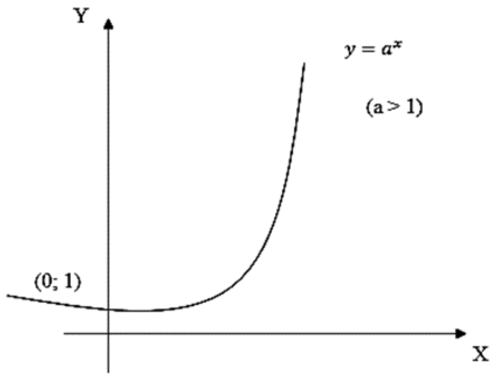
A função exponencial *f*, de domínio ℝ e contra domínio ℝ, é definida por $y = a^x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$.

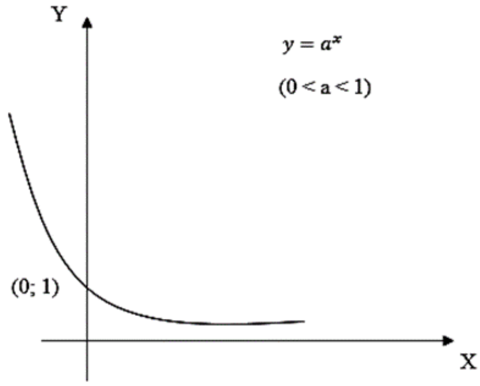
Obs.:

- É uma curva que está totalmente acima do eixo *x*;
- A curva contém sempre o ponto (0; 1);
- A $f(x)$ é crescente quando $a > 1$;

[1] O Custo Marginal é a primeira derivada do Custo Total

- A $f(x)$ é decrescente quando $0 < a < 1$.





5.1. Potências

A potência ***n*** de um número é o produto de ***n*** fatores desse número: $a^n = a \, . \, a \, . \, a \, ...$, onde $n \in \mathbb{Z}$ e ***a*** é chamado de base e ***n*** é chamado de expoente.

Ex.: $2^3 = 2 \, . \, 2 \, . \, 2 = 8$

Se a base é um número positivo, qualquer que seja o expoente, a potência é positiva. Porém, se a base é um número negativo, a potência será positiva se o expoente for um número par e negativa se o expoente for um número ímpar.

5.1.1. Propriedades das potências

Propriedades	Exemplos
$\boldsymbol{a^m . a^n = a^{m+n}}$	$2^3 . 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$
$\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$	$\frac{2^7}{2^2} = 2^{7-2} = 2^5 = 32$
$\boldsymbol{a^0 = 1}$	$259^0 = 1$
$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \, . \, n}}$	$(2^2)^5 = 2^{2 \, . \, 5} = 2^{10} = 1024$
$\boldsymbol{(\frac{a}{b})^m = \frac{a^m}{b^m}}$ **, onde b ≠ 0**	$(\frac{2}{3})^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
$\boldsymbol{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$	$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$
$\boldsymbol{a^{-n} = (\frac{1}{a})^n}$ **, onde a ≠ 0**	$2^{-1} = \frac{1}{2}$
$\boldsymbol{a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}}$	$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}$

APE: Cobb-Douglas: $Y = x_1^{\alpha}.x_2^{\beta} \rightarrow Y = L^{\alpha}K^{\alpha-1}$

Ex.: Dada a seguinte função de Produção $y = 2K^{0,5}L^{0,5}$ e dado $L = 81(Trabalho)\ e$ $K = 16(Capital)$, qual seria a quantidade produzida?

$y = 2(16)^{0,5}(81)^{0,5}$

$y = 2(16)^{\frac{1}{2}}(81)^{\frac{1}{2}}$

$y = 2(\sqrt[2]{16}\,)(\sqrt[2]{81})$

$y = 2(4)(9)$

$y = 72$

5.2. O número irracional *e* (e^x)

O número de Euler, ***e* = 2,7182818284...** está relacionado ao conceito de continuidade.

$e \cong 2{,}718$

$f(x) = e^x$

Obs: Quando *n* aumenta indefinidamente, a expressão $(1 + \frac{1}{n})^n$ tende a aproximar-se do valor de *e*.

APE: Crescimento populacional; Juros Compostos.

6. FUNÇÕES LOGARÍTMICA

Denomina-se logaritmo do número *N* na base a o expoente *x* a que se deve elevar base a, a fim de que a potência obtida seja igual ao número *N*.

$\log_a N = x$

Onde:

- *N* é chamado de logaritmando;
- a é chamado de base;
- *x* é o lagaritmo;

Obs.:

- $N > 0$
- $a > 0$ e $a \neq 1$
- *N* e a são positivos

Ex.: Se $2^4 = 16$, então 4 é o logaritmo de 16 na base 2, ou: $\log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$.

Obs.: Nos logaritmos decimais, ou seja, aqueles em que a base é 10, está frequentemente é omitida.

Ex.: logaritmo de 2 na base 10, notação: $\log 2$.

APE: A função logarítmica é usada nos modelos econométricos:

- Modelo log-linear, duplo-log ou log-log;
- Modelos semilogarítmicos (log-lin e lin-log).

6.1. Propriedades dos Logaritmos

Domínio (condição de existência): Segundo a definição, o logaritmando e a base devem ser positivos, e a base deve ser diferente de 1.

(1) $\log_a 1 = 0$, a > 0 e a ≠ 0
(2) $a^{\log_a N} = N$, N > 0, a > 0 e a ≠ 0
(3) $\log_a a^n = n$, a > 0 e a ≠ 0
(4) $\log_a a = 1$
(5) $\log_{a^p} b = \frac{1}{p}\log_a b$
(6) Se $\log_a x = \log_a y$ (∴) $x = y$
(7) $\log_a m\,.\,n = \log_a m + \log_a n$
(8) $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n$
(9) $\log_a m^n = n\,.\,\log_a m$
(10) $\log_a \sqrt[n]{m} = \frac{1}{n}\log_a m$
(11) $\text{colog}_a N = -\log_a N$

Obs.: Cologaritmo: Denomina-se cologaritmo de um número N (N > 0) numa mesma base a (a > 0 e a ≠ 1) o oposto do logaritmo do número N na base a.

(12) $\log_b m = \frac{\log_a n}{\log_a b}$, sendo m > 0, n > 0, n ≠ 1, a > 0 e a ≠ 0.

Obs.: Tendo os log na base a e querendo escrever o valor de um deles na base b ($\log_b n$), realizamos esta mudança de base através da igualdade: $\log_s r = \log_{s^m} r^m$

6.2.Logaritmo de base *e* (Logaritmo Neperiano)

e = 2,7182 (número irracional)

$\log_e N \;\; ou \;\; \log N$ → Logaritmo Neperiano

APE: Matemática Financeira

Funções logarítmica e exponencial

Ex.: Um capital de R$ 18.000,00 foi aplicado durante 15 meses em regime de juros compostos, a remuneração foi de R$ 10.043,40. Qual foi a taxa de juros mensal dessa aplicação?

Resposta:

$M = C \,.\, (1 + i)^n$ (1)

Vamos calcular o montante: $M = C + J$ (2)

M = montante

C = capital

J = juros

i = taxa de juros

n = tempo

$M = 18.000 + 10.043{,}40 = 28043{,}40$
Substituindo em (1):

$28043{,}40 = 18000(1 + i)^{15}$

$\frac{28043{,}40}{18000} = (1 + i)^{15}$

$1{,}558 = (1 + i)^{15}$

Usando o *ln* de ambos os lados:

$\ln 1{,}558 = \ln(1 + i)^{15}$

$\ln(1 + i)^{15} = 0{,}4434$

$15 \,.\, \ln(1 + i)$

$\ln(1 + i) = \frac{0{,}4434}{15}$

$\ln(1 + i) = 0{,}02956$

$\ln(x) = b \rightarrow x = e^b$

$1 + i = e^{0{,}02956}$

$i = 1{,}03 - 1$

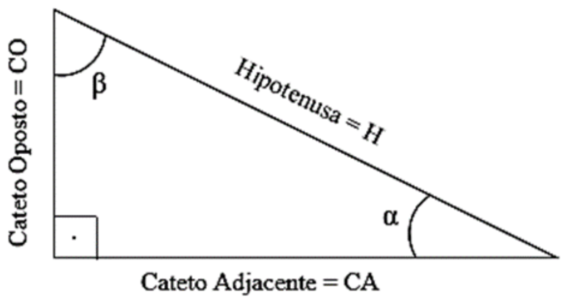
$i = 0{,}03 \rightarrow i = 3\%$

7. FUNÇÃO TRIGONOMÉTRICA

A palavra trigonometria significa medida de três ângulos (trigono = triangular; metria = medida). Basicamente, o que se estuda na trigonometria é a relação entre ângulos e distâncias.

7.1. Triangulo Retângulo

Chamamos de triângulo retângulo aquele que tem que possui ângulo reto (ângulo de 90º).



Obs.:

$\alpha + \beta = 90°$

$\alpha + \beta + 90° = 180$

7.1.1. Razões Trigonométricas

(1) Seno de ângulo α = $\frac{cateto\ oposto\ do\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{hipotenusa}$

(2) Cosseno do ângulo α = $\frac{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{hipotenusa}$

(3) Tangente do ângulo α = $\frac{cateto\ oposto\ do\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}$

(4) Cotangente do ângulo α = $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

(5) Secante do ângulo α = $\frac{1}{\cos\alpha}$

(6) Cossecante do ângulo α = $\frac{1}{\sin\alpha}$

7.1.2. Teorema de Pitágoras

Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida da hipotenusa.

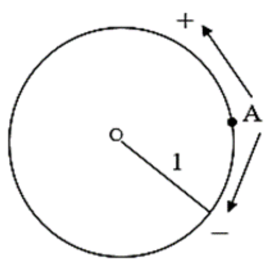
$$H^2 = CO^2 + CA^2$$

7.2. Ciclo Trigonométrico

O ciclo trigonométrico é uma circunferência orientada de raio 1. A orientação é:

Positiva → no sentido anti-horário

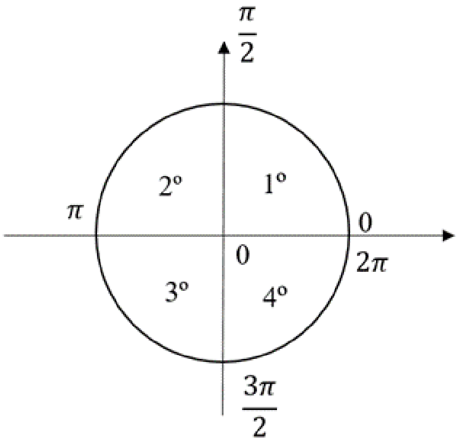
Negativa → no sentido horário



O ciclo trigonométrico é dividido em quadrantes, determinados pelos eixos cartesianos.

- O primeiro quadrante contém a extremidade dos arcos entre 0 e 90º ou 0 e $\frac{\pi}{2}$ radianos;
- O segundo quadrante contém a extremidade dos arcos entre 90º e 180º ou $\frac{\pi}{2}$; e π radianos;
- O terceiro quadrante contém a extremidade dos arcos entre 180º e 270º ou π e $\frac{3\pi}{2}$ radianos;

- O quarto quadrante contém a extremidade dos arcos entre 270º e 360º ou $\frac{3\pi}{2}$ e 2π radianos.



APE: Curva de Oferta

Quando o preço for R$ 300,00, então 100 máquinas fotográficas de um determinado tipo estão disponíveis no mercado. Sabendo que o ângulo de inclinação da reta que descreve a equação da oferta é aproximadamente 26,6º, determine o preço, quando 180 máquinas fotográficas estão disponíveis no mercado.

Obs.:

- A inclinação, declive ou coeficiente angular de uma reta é a tangente do ângulo que faz com o eixo dos x.
- m = tgα; $m = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \rightarrow y_b - y_a = m(x_b - x_a)$

O ângulo da de inclinação da reta é 26,6º, então, tem-se que a declividade da reta é:

$$m = tg(26{,}6°) \cong 0{,}5 \rightarrow \frac{1}{2}$$

Quando o preço for de R$ 300,00, temos 100 máquinas disponíveis no mercado. Assim, o ponto (100; 300) pertence a reta. Assim, também pode-se usar a equação para determinar a equação de oferta.

$$y - y_1 = tg\alpha\ (x - x_1)$$

$$y - 300 = \frac{1}{2}(x - 100)$$

$$y - 300 = \frac{1}{2}x - 50$$

$$y - \frac{1}{2}x - 300 + 50 = 0$$

$$y - \frac{1}{2}x - 250 = 0$$

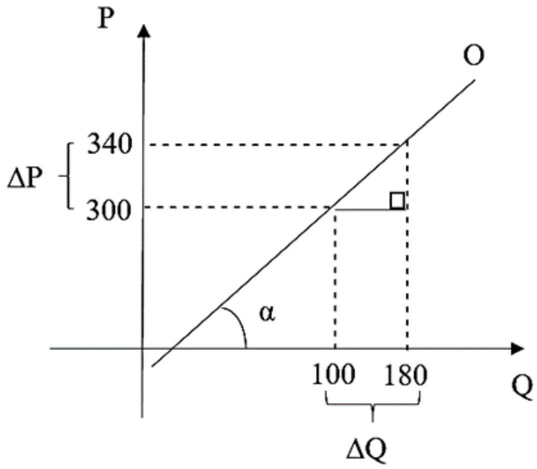
Como queremos determinar o preço da máquina fotográfica, quando 180 máquinas fotográficas estão disponíveis no mercado, basta substituir *x* = 180 na equação da oferta para determinar o valor do preço *y*.

$$y - \frac{1}{2}(180) - 250 = 0$$

$$y = 250 + 90$$

$$y = 340$$

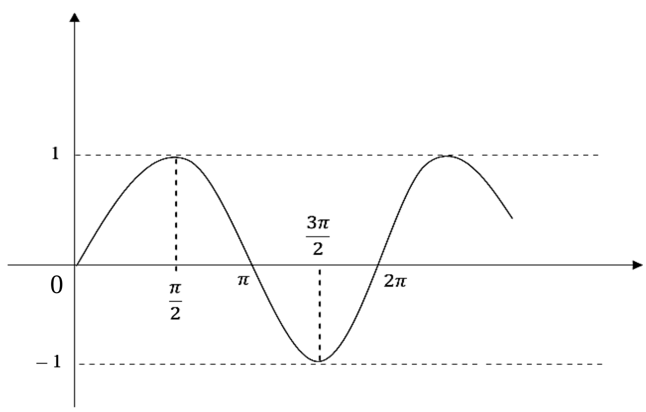
Então, quando 180 máquinas fotográficas estão no mercado, o valor cobrado irá ser R$ 340,00 reais.



7.3. Gráficos Trigonométricos

Função Seno: $sen = \frac{CO}{H}$

$y = sen(x)$

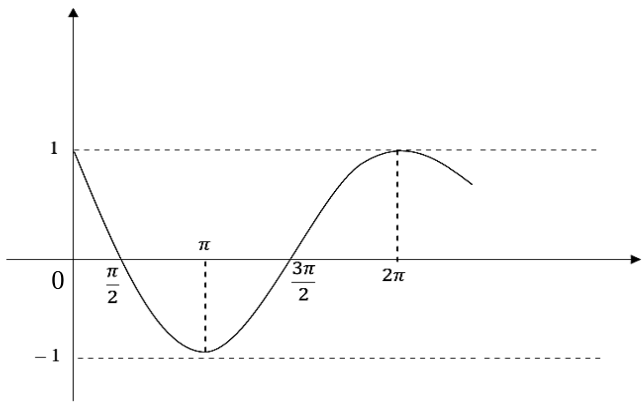


Dm = ℝ

Im = [–1; 1]

Função Cosseno: $cos = \frac{CA}{H}$

$y = \cos(x)$



Dm = ℝ

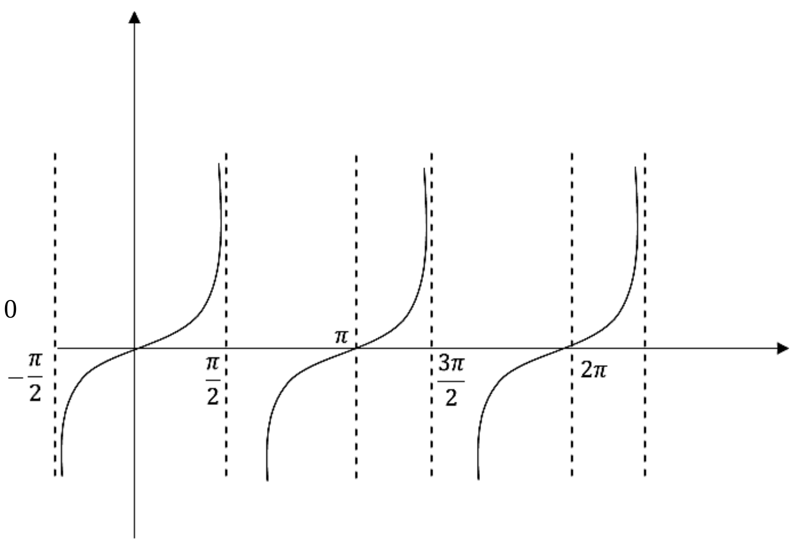
Im = [–1; 1]

APE: Gráficos Periódicos; “Desenvolvimento Econômico”, as fases do ciclo econômico.

Obs.: As funções sen e cos são periódicas com período que se repete a cada 2π.

Função Tangente: $tg = \frac{CO}{CA}$

$y = tg(x)$

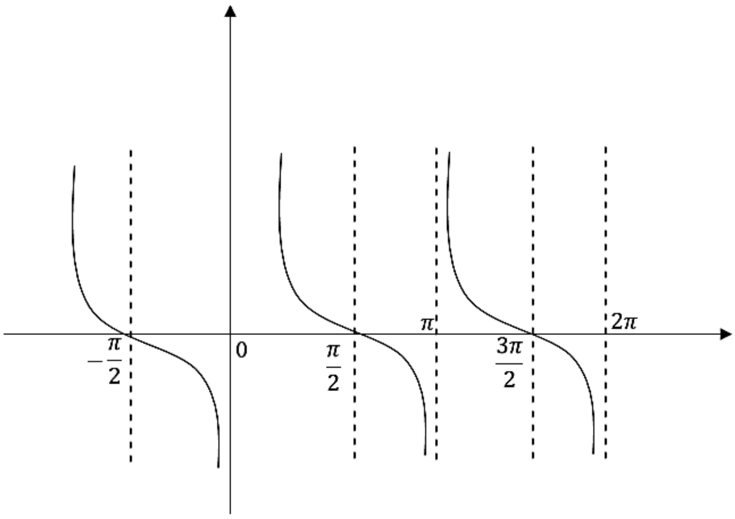


Dm = $\mathbb{R} - \{x = K\pi + \frac{\pi}{2}; K \in \mathbb{Z}$

Im = ℝ

Função Cotangente: $cotg = \frac{\cos(x)}{sen(x)}\ ou\ \frac{1}{tang(x)}$

$y = cotg(x)$

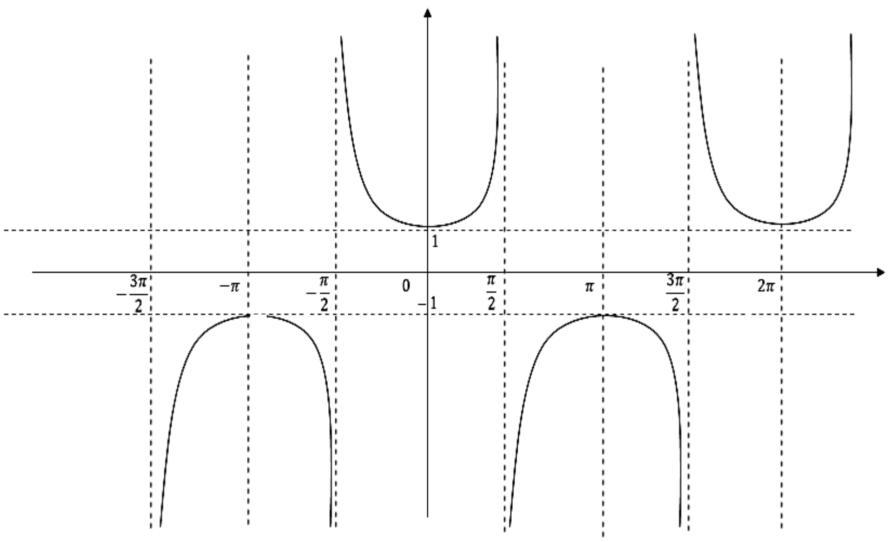


Dm = $\mathbb{R} - \{x = K\pi + \frac{\pi}{2}; K \in \mathbb{Z}$

Im = $\mathbb{R}$

Função Secante: $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$

$y = \sec(x)$

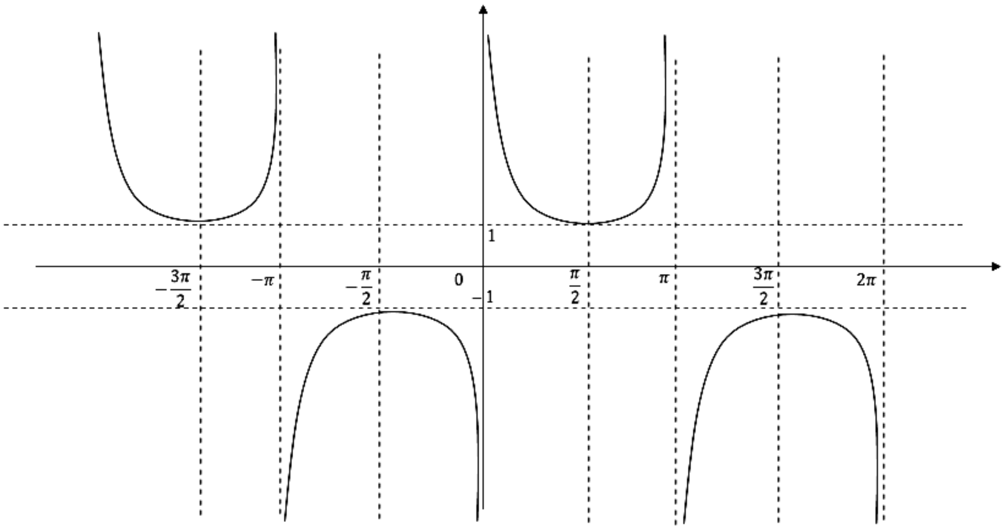


Dm = $\{x \ \in \mathbb{R}\ /\ cos\ (x) \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R}\ / x\ K\frac{\pi}{2}; K \in \mathbb{Z}$

Im = $]-\infty, -1] \cup [+1, +\infty[$

Função Cossecante: $cosse\ (x) = \frac{1}{sen\ (x)}$

$y = cossec(x)$



Dm = Dm = $\mathbb{R} - \{x/\ x = K\pi; K \in \mathbb{Z}$

Im = $(-\infty; -1] \cup [+1; +\infty)$