Material Didático De Apoio
Equações Diferenciais Ordinárias -EDO

1.1 – INTRODUÇÃO

Definições:

1) Equação que descreve uma relação entre uma função desconhecida *(y)* e suas derivadas *(y'; y''; y'''; etc.).*
2) Equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.

1.2 - CLASSIFICAÇÃO

Quanto ao tipo:

EDO = Equações diferenciais Ordinárias – equação que contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável dependente.

$$Ex:(y-x)dx+4xdy=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x}=x$$

EDP = Equações diferenciais parciais – equação que envolve parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes.

$$Ex:\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=u$$

Quanto à ordem e grau:

Ordem - a derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a ordem da equação.

$Ex:\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+5\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3-4y=e^x \rightarrow$ ED ordinária de 2ª ordem

$4x\frac{\partial y}{\partial x}+y=x \rightarrow$ ED ordinária de 1ª ordem

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \rightarrow \text{ED parcial de 4ª ordem}$$

Grau - o valor do expoente para a derivada mais alta da equação.

$$Ex: y''+3y'+6y = sen\ t\ \begin{Bmatrix} ordem = 2 \\ grau = 1 \end{Bmatrix}$$

$$(y'')^3+3(y')^{10}+6y = tg\ t \begin{Bmatrix} ordem = 2 \\ grau = 3 \end{Bmatrix}$$

$$y' = N(x;y)dy\ \begin{Bmatrix} ordem = 1 \\ grau = 1 \end{Bmatrix}$$

Quanto à linearidade:

Linear – quando a ordem da derivada mais alta que aparecer na equação for = 1 $\Rightarrow \frac{dy}{dt}\ ou\ y'(t)$

$$Ex: \frac{dy}{dt} = 0{,}5y+5$$

Não linear – quando a ordem da derivada mais alta que aparecer na equação for > 1 $\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2};\frac{d^3y}{dt^3}$ = ***y''(t); y'''(t)***

$$Ex: \frac{yd^2y}{dt^2}-2\frac{dy}{dt}=3t$$

1.3 – SOLUÇÃO

Objetivo da solução: encontrar a função desconhecida que quando substituída na equação diferencial dada reduz a equação a uma identidade.

$Ex:$ Verificar que $y=\frac{x^4}{16}$ é uma solução para a equação não linear $\frac{\partial y}{\partial x}=xy^{1/2}$ no intervalo $(-\infty;+\infty)$.

Resposta : $\frac{\partial y}{\partial x}=4.\frac{x^3}{16}=\frac{x^3}{4}$

$$y^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x^4}{16}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{4}$$

Logo, $\frac{\partial y}{\partial x} - xy^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{4} - x.\frac{x^2}{4} = \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0$

$$\textbf{Solução} \begin{cases} \text{possui um n infinito de soluções (famílias);} \\ \text{presença de constantes arbitrárias;} \\ \text{métodos estabelecidos de solução para casa tipo de equação.} \end{cases}$$

Solução Geral - na solução de uma equação de ordem n, além de uma função do tempo, essa solução deve conter também n constantes arbitrárias, sendo que estas não permitem que se defina uma única função como solução para a equação diferencial, mas sim uma família infinita de funções, ou seja, uma solução geral.

Solução Particular – solução obtida com base na designação de valores particulares para as constantes arbitrárias (A). Para achar a solução particular deve-se satisfazer certas condições adicionais, chamadas condições iniciais, como o Problema de Valor Inicial (PVI).

2.0 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEAR (EDOL)

2.1 – TERMO CONSTANTE E COEFICIENTE CONSTANTE

➢ Caso homogêneo

- Forma: $\frac{dy}{dt} + cy = 0$
- Solução Geral: $y(t) = A.e^{-ct}$

Ex: $3\frac{dy}{dt} + 12y = 0$

Normalizando a equação $\rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{12y}{3}$

$$\frac{dy}{dt} = -4y \rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dt} = -4$$

$$\int \frac{1}{y}.\frac{dy}{dt}.dt = -\int 4dt$$

$$\ln y = -4t + c$$

$$e^{\ln y} = e^{-4t}.e^{c}$$

$$y = A.e^{-4t}$$

ic: $A = e^{c}$ (constante arbitrária)

- Caso não homogêneo

Forma: $\frac{dy}{dt} + cy = b$

Solução Geral: $\begin{array}{l} y(t) = y_h + y_p \\ y(t) = A.e^{-ct} + \frac{b}{c} \end{array}$; onde, se $y=k$ (constante), logo $\frac{dy}{dt} = 0$

então $cy_p = b$

$$y_p = \frac{b}{c}$$

Ex: $\frac{dy}{dt} + 2y = 6$

Solução Homogênea

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dt} = -2y$$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y} = -2 \rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dt} = -2$$

$$\int \frac{1}{y}.\frac{dy}{dt}dt = \int -2dt$$

$$\ln y = -2t + c$$

$$e^{\ln y} = e^{-2t} + e^{c}$$

$$y_h = e^{-2t}.A$$

$$y_h = A.e^{-2t}$$

Solução Particular

y=*cte*, então $\frac{dy}{dt} = 0$

logo, $2y = 6$

$$y = 6/2$$
$$y_p = 3$$

Solução Geral

$$y(t) = y_h + y_p$$
$$y(t) = A.e^{-2t} + 3$$

PVI→ condição inicial *y(0) = 10*

$$y(t) = A.e^{-2t} + 3$$
$$y(t) = (y(0) - \frac{b}{c}).e^{-2t} + 3$$
$$y(t) = (10 - 3).e^{-2t} + 3$$
$$y(t) = 7e^{-2t} + 3$$

- EDOL nao homogênea <u>quando uma constante diferente de zero toma o lugar do zero após a igualdade</u>

Forma: $\frac{dy}{dt} + cy = K$

Solução Geral: $y(t) = y_h + y_p$

$y(t) = A.e^{-ct} + \frac{K}{c}$ com 'c' $\neq 0$

ic: Problema do Valor Inicial (PVI) - introdução de uma condição inicial na qual *y* assume o valor *y(0)* quando *t=0*, logo:

$y_t = A + \frac{K}{c} \therefore A = y(0) - \frac{K}{c}$; A utilização da condição inicial (PVI) para definir a constante arbitrária A deve ser executada como a etapa final, após achado a solução geral para a equação completa.

Ex: $\frac{dy}{dt} - 8y = 4$, com a condição inicial *y(0)=2*

Solução Homogênea

$$\frac{dy}{dt} - 8y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dt} = 8y$$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y} = 8 \rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dt} = 8$$

$$\int \frac{1}{y}.\frac{dy}{dt}dt = \int 8dt$$

$$\ln y = 8t + c$$

$$e^{\ln y} = e^{8t} + e^{c}$$

$$y_h = e^{8t}.A$$

$$y_h = A.e^{8t}$$

Solução Particular

$$\frac{dy}{dt} - 8y = 4 \rightarrow \frac{K}{c} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$$

$$y_p = -\frac{1}{2}$$

Solução Geral

$$y(t) = y_h + y_p$$

$$y(t) = A.e^{8t} - \frac{1}{2}$$

$$PVI \Rightarrow A = (y(0) - \frac{K}{c}) \rightarrow \ A = \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)\right) \ \rightarrow A = \frac{5}{2}$$

$$y(t) = \frac{5}{2}.e^{8t} - \frac{1}{2}$$

2.2 - TERMO VARIÁVEL E COEFICIENTE VARIÁVEL

- Caso homogêneo

- Forma: $\frac{dy}{dt} + u(t)y = 0$
- Solução Geral: $y(t) = A.e^{-\int u(t)dt}$

Ex: $\frac{dy}{dt}+3t^2y=0$

$$\frac{dy}{dt}=-3t^2y \rightarrow \frac{\frac{dy}{dt}}{y}=-3t^2$$

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dt}=-3t^2 \rightarrow \int \frac{1}{y}.\frac{dy}{dt}.dt=-\int 3t^2dt$$

$$\int \frac{1}{y}.dy=-\int 3t^2dt \rightarrow \ln y+c=-\int 3t^2dt$$

$$\ln y=-c-\int 3t^2dt$$

$$e^{\ln y}=e^{-c}.e^{-\int 3t^2dt}$$

$$y(t)=e^{-c}.e^{-\int 3t^2dt}$$

Desenvolvendo a resposta: $A=e^{-c}$; $e^{-\int 3t^2dt}=e^{-3.\frac{1}{3}.t^3+c}=e^{-t^3+c}=e^{-t^3}.e^c$

$$\begin{aligned} y(t) &= A.e^{-t^3}.e^c \\ y(t) &= B.e^{-t^3} \end{aligned} \quad ;\text{ onde } B=A.e^c$$

- Caso não homogêneo

Forma: $\frac{dy}{dt}+u(t)y=w(t)$, onde $w(t)\neq 0$

Solução Geral: $y(t)=e^{-\int u(t)dt}\left(A+\int we^{\int u(t)dt}dt\right)$

Ex¹: $\frac{dy}{dt}+4ty=4t$

$$\begin{aligned} u&=4t \\ w&=4t \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} &\int udt=\int 4tdt \\ &4\int tdt=4.\frac{1}{2}t^2+c \\ &2t^2+c \end{aligned}$$

Colocando na Solução Geral:

$$y(t)=e^{-\int u(t)dt}\left(A+\int we^{\int u(t)dt}dt\right)$$
$$y(t)=e^{-(2t^2+c)}\left(A+\int 4t.e^{(2t^2+c)}dt\right)$$

Método de Integração por Substituição:

$\int 4t.e^{(2t^2+c)}dt$, reorganizando $\int e^{(2t^2+c)}4tdt$

chamando: $u=2t^2+c$

$$\frac{du}{dt}=4t \qquad \int e^u.\frac{du}{4}=\frac{1}{4}\int e^u du$$
$$du=4tdt \quad ; \qquad \frac{1}{4}.e^u+c=\frac{1}{4}.e^{(2t^{2+c})}+c$$
$$\frac{du}{4}=tdt \qquad \frac{1}{4}.e^{2t^2}.e^c+c$$

$$y(t)=e^{-2t^2}.e^{-c}.A+e^{-2t^2}.e^{-c}.\frac{1}{4}.e^{2t^2}.e^c+c$$
$$y(t)=e^{-2t^2}.e^{-c}.A+\frac{1}{4}+c \qquad ;\text{ onde } B\cong A.e^{-c}+c$$
$$y(t)=B.e^{-2t^2}+\frac{1}{4}$$

Ex²: $\frac{dy}{dt}+3ty=t$

$$\int udt=\int 3tdt$$
$$\begin{matrix} u=3t \\ w=t \end{matrix} \quad ; \quad 3\int tdt=3.\frac{1}{2}t^2+c$$
$$\frac{3}{2}t^2+c$$

Colocando na Solução Geral:

$$y(t)=e^{-\int u(t)dt}\left(A+\int we^{\int u(t)dt}dt\right)$$
$$y(t)=e^{-\left(\frac{3}{2}t^2+c\right)}\left(A+\int t.e^{\left(\frac{3}{2}t^2+c\right)}dt\right)$$

Método de Integração por Substituição:

$\int t.e^{\left(\frac{3}{2}t^2+c\right)}dt$, reorganizando $\int e^{\left(\frac{3}{2}t^2+c\right)}tdt$

chamando: $u=\frac{3}{2}t^2+c$

$$\frac{du}{dt}=2.\frac{3}{2}t \qquad \int e^u.\frac{du}{3}=\frac{1}{3}\int e^u du$$
$$\frac{du}{dt}=3t \quad ; \quad \frac{1}{3}.e^u+c=\frac{1}{3}.e^{\frac{3}{2}t^2+c}+c$$
$$\frac{du}{3}=tdt$$

$$y(t)=e^{-\frac{3}{2}t^2}.e^{-c}.A+e^{-\frac{3}{2}t^2}.e^{-c}.\frac{1}{3}.e^{\frac{3}{2}t^2}.e^{c}+c$$
$$y(t)=e^{-\frac{3}{2}t^2}.e^{-c}.A+\frac{1}{3}+c \qquad \text{; onde } B\cong A.e^{-c}+c$$
$$y(t)=B.e^{-\frac{3}{2}t^2}+\frac{1}{3}$$

Ex³: $\frac{dy}{dt}+2ty=t$, dada a condição inicial $y(0)=3/2$:

$$\int udt=\int 2tdt$$
$$u=2 \qquad w=t \quad ; \quad 2\int tdt=2.\frac{1}{2}t^2+c$$
$$t^2+c$$

Colocando na Solução Geral:

$$y(t)=e^{-\int u(t)dt}\left(A+\int we^{\int u(t)dt}dt\right)$$
$$y(t)=e^{-\left(t^2+c\right)}\left(A+\int t.e^{\left(t^2+c\right)}dt\right)$$

Método de Integração por Substituição:

$\int t.e^{(t^2+c)}dt$, reorganizando $\int e^{(t^2+c)}tdt$

chamando: $u = t^2 + c$

$$\frac{du}{dt} = 2t \qquad \int e^u.\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int e^u du$$

$$du = 2dt \;;$$

$$\frac{du}{2} = tdt \qquad \frac{1}{2}.e^u + c = \frac{1}{2}.e^{t^2+c} + c$$

$$y(t) = e^{-t^2}.e^{-c}.A + e^{-t^2}.e^{-c}.\frac{1}{2}.e^{t^2}.e^{c} + c$$

$$y(t) = e^{-t^2}.e^{-c}.A + \frac{1}{2} + c \qquad \text{; onde } B \cong A.e^{-c} + c$$

$$y(t) = B.e^{-t^2} + \frac{1}{2}$$

Dada a condição inicial $y(0) = 3/2$:

$$y(t) = B.e^{-t^2} + 3/2$$

$$\downarrow$$

$$\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right).e^{-t^2} + \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{2}{2}\right).e^{-t^2} + \frac{1}{2}$$

$$y(t) = e^{-t^2} + \frac{1}{2}$$

3.0 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE ORDEM MAIS ALTA

- É linear
- Equação diferencial com termo constante e coeficiente constante
- Não ocorre nenhum termo de produto no qual *y* seja multiplicado por qualquer de suas derivadas

- Forma: $y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y = b$

onde, a_1, a_2 e b = constantes ; $\begin{cases} b = 0 \rightarrow \textit{caso homogêneo} \\ b \neq 0 \rightarrow \textit{caso não homogêneo} \end{cases}$

- Solução Particular (y_p):

$$y_p = \frac{b}{c} \text{ ou } \frac{b}{a_2}$$

Ex: Encontre a solução particular da equação diferencial abaixo:

$$y''(t) + y'(t) - 2y = -10$$

Resolução:

$$y_p = \frac{b}{a_2}$$

$$y_p = \frac{-10}{-2}$$

$$y_p = 5$$

➢ Solução Homogênea ou Complementar

- Forma: $y''(t) + a_1 y(t) + a_2 y = 0$

- Solução: $y = Ae^{rt}$, logo $y' = rAe^{rt}$

  $y'' = r^2 Ae^{rt}$

$$r^2 Ae^{rt} + a_1 rAe^{rt} + a_2 Ae^{rt} = 0$$

$$Ae^{rt}\left(r^2 + a_1 r + a_2\right) = 0$$

Equação Característica ou Auxiliar: $r^2 + a_1 r + a_2 = 0$;

usa-se a Formula de Baskara para encontrar as raízes características r_1 e r_2:

$$r_1, r_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{(a_1)^2 - 4a_2}}{2}$$

Obs: $\begin{cases} a \text{ soma das raízes} & r_1 + r_2 = -a_1 \\ o \text{ produto das raízes} & r_1 . r_2 = a_2 \end{cases}$; Há duas soluções $\begin{cases} y_1 = A_1 e^{r_1 t} \\ y_2 = A_2 e^{r_2 t} \end{cases}$,

onde : A_1 e A_2 são constantes arbitrárias

r_1 e r_2 são raízes características

* Combinar as soluções y_1 e y_2 de modo a incluir ambas as constantes A_1 e A_2, onde $y_h = y_1 + y_2$.

3.1 – RAÍZES CARACTERÍSTICAS

- Raízes Reais e Distintas

$$y_h = y_1 + y_2$$
$$y_h = A_1 e^{r_1 t} + A_2 e^{r_2 t} \text{ com } r_1 \neq r_2$$

Ex: $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} - 24y = 28$ (ou $y'' + 2y' - 24y = 48$), dadas as condições iniciais *y(0) = 0 e y'(0) = 1.*

Solução Particular:

$$y_p = \frac{b}{a_2}$$
$$y_p = \frac{48}{-24}$$
$$y_p = -2$$

Solução Homogênea ou Complementar:

$$y'' + 2y' - 24y = 0$$
$$r^2 Ae^{rt} + 2rAe^{rt} - 24Ae^{rt} = 0$$
$$Ae^{rt}\left(r^2 + 2r - 24\right) = 0$$

Equação Característica:

$$r^2 + 2r - 24 = 0; \quad r_1, r_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{(a_1)^2 - 4a_2}}{2}$$
$$r_1, r_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(-24)}}{2}$$
$$r_1, r_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2}$$
$$r_1, r_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2}$$
$$r_1, r_2 = \frac{-2 \pm 10}{2}$$
$$r_1 = 4$$
$$r_2 = -6$$

$$y = y_h + y_p$$
$$y = (y_1 + y_2) + y_p$$
$$y = A_1 e^{4t} + A_2 e^{-6t} - 2$$
$$\downarrow$$
(Solução Geral)

Dadas as condições iniciais:

$y(0) = 0$ para *t(0)*;

$$y = A_1 e^{4t} + A_2 e^{-6t} - 2 = 0$$
$$A_1 e^{4(0)} + A_2 e^{-6(0)} - 2 = 0$$
$$A_1 + A_2 = 2$$

$y'(0) = 1$

$$y = A_1 e^{4t} + A_2 e^{-6t} - 2 = 0$$
$$4A_1 e^{4t} + 6A_2 e^{-6t} + 0 = 1$$
$$4A_1 e^{4(0)} + 6A_2 e^{-6(0)} = 1$$
$$4A_1 - 6A_2 = 1$$

Formação do sistema:

$\begin{cases} A_1 + A_2 = 2 \\ 4A_1 - 6A_2 = 1 \end{cases}$; resolvendo por substituição: $A_1 = 2 - A_2$,

Logo: $4A_1 - 6A_2 = 1$

$$4(2 - A_2) - 6A_2 = 1$$
$$8 - 4A_2 - 6A_2 = 1$$
$$-10A_2 = 1 - 8$$
$$-10A_2 = -7(-1)$$
$$A_2 = \frac{7}{10}$$

;

$$A_1 = 2 - A_2$$
$$A_1 = 2 - \frac{7}{10}$$
$$A_1 = \frac{20 - 7}{10}$$
$$A_1 = \frac{13}{10}$$

Assim: $y = A_1 e^{4t} + A_2 e^{-6t} - 2$

$$y_t = \frac{13}{10} e^{4t} + \frac{7}{10} e^{-6t} - 2$$

4.0 - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EXATAS

- Lembrando Diferencial Total

$dF(y,t) = \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt$; onde $\frac{\partial F}{\partial y}$ e $\frac{\partial F}{\partial t}$ são derivadas parciais.

Quando $F(y,t) = 0$, então $\frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0$;

chamando: $M = \frac{\partial F}{\partial y}$ e $N = \frac{\partial F}{\partial t}$

- Forma: $F(y, t) = 0$
  $Mdy + Ndt = 0$

- Solução: $F(y, t) = c$

Obs: uma ED Exata será sempre de 1ª grau e de 1ª ordem; surge $\varphi(t)$ - psi - que desempenha um papel como uma constante de integração, representando qualquer termo aditivo que contém a variável *t* e ou algumas constantes (mas nenhum *y*).

- Método em 4 etapas:

1) Integra *M* com respeito a *y* e acrescentar $\varphi(t)$

$$F(y,t) = \int M dy + \varphi(t)$$

2) Diferenciar esse resultado com respeito a *t* , $\frac{\partial F(y,t)}{\partial t}$

3) Iguala a N para achar quem é $\varphi'(t)$

4) Integra $\varphi'(t)$

5) Soma os resultados para obter a solução da equação e iguala a *c* (constante arbitrária)

Ex: $2ytdy + y^2 dt = 0$

$M = \frac{\partial F}{\partial y} = 2yt$; $N = \frac{\partial F}{\partial t} = y^2$

Passo 1: $F(y,t) = \int M dy + \varphi(t)$

$= \int 2yt dy + \varphi(t)$

$= 2\int yt dy + \varphi(t)$

$= 2.\frac{1}{2} y^2 t + \varphi(t)$

$= y^2 t + \varphi(t) \to 1^a\, resultado$

Passo 2: $\frac{\partial F(y,t)}{\partial t} = y^2 + \varphi'(t)$

Passo 3: $y^2 + \varphi'(t) = N$

$y^2 + \varphi'(t) = y^2$

$\varphi'(t) = 0$

Passo 4: $\int \varphi'(t) dt = \int 0 dt = 0 \to 2^a\, resultado$;
0 = k

Passo 5: $F(y,t) = y^2 t + k$

$y^2 t + 0 = c$

$y^2 = \frac{c}{t}$

$y = (ct^{-1})^{1/2}$

Ex²: $(t+2y)dy + (y+3t^2)dt = 0$

$M = \frac{\partial F}{\partial y} = (t+2y)$; $N = \frac{\partial F}{\partial t} = (y+3t^2)$

Passo 1: $F(y,t) = \int M dy + \varphi(t)$

$= \int (t+2y) dy + \varphi(t)$

$= ty + 2\frac{1}{2} y^{2+} \varphi(t)$

$= ty + y^2 + \varphi(t) \to 1^a\, resultado$

Passo 2: $\frac{\partial F(y,t)}{\partial t} = y + \varphi'(t)$

$$y + \varphi'(t) = N$$
$$y + \varphi'(t) = y + 3t^2$$
$$\varphi'(t) = 3t^2$$

Passo 3: $\int \varphi'(t)dt = \int 3t^2 dt$

$$3.\frac{1}{3}t^3 + c = t^3$$

Passo 4: $F(y,t) = ty + y^2 + \varphi(t)$

$$ty + y^2 + t^3 = c$$

4.1 - EQUAÇÕES SEPARÁVEIS

- Forma: $M(t) + N(t)\frac{dy}{dt} = 0$ ou $M(t)dt + N(t)dy = 0$
- Solução: $\int N(y)dy = -\int M(t)dt + c$

Ex: $\frac{dy}{dt} = t(1 - y^2)$

$$\frac{dy}{(1-y^2)} = tdt$$
$$\int \frac{1}{(1-y^2)}dy = \int tdt$$
$$\ln(1-y^2) = \frac{1}{2}t^2 + c$$
$$e^{\ln(1-y^2)} = e^{\frac{1}{2}t^2}.e^c$$
$$1 - y^2 = e^{\frac{1}{2}t^2}.e^c$$
$$-y^2 = \left(e^{\frac{1}{2}t^2}.A\right) - 1$$
$$y^2 = 1 - Ae^{\frac{1}{2}t^2}$$
$$y = \left(1 - Ae^{\frac{1}{2}t^2}\right)^{1/2}$$