Material Didático de Apoio

OTIMIZAÇÃO CONDICIONADA

1. INTRODUÇÃO

O Método do Multiplicador de Lagrange permite encontrar extremos (máximos e mínimos) de uma função de uma ou mais variáveis suscetíveis a uma ou mais restrições.

2. MÉTODO PRÁTICO

Passos:

1. Formar a equação Lagrangeana $F(x; y; \lambda)$
2. Condição necessária: as derivadas parciais iguais a zero.
3. Resolve o Sistema de equações achando $x; y; \lambda$.
4. Substituir os valores de x e y na função principal e achar o máximo ou mínimo

- Condição Suficiente ou Condição de 2ª Ordem

Identifica se o ponto é máximo ou mínimo através de uma análise do Hessiano Aumentado $|\overline{H}|$ (ou Hessiano Orlado).

\- Formação do Hessiano |H|

Hessiano: determinante formado pelas derivadas parciais de 2ª ordem da função principal.

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} fxx & fxy \\ fyx & fyy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Hessiano Aumentado: para formar o hessiano aumentado adiciona-se uma linha acima e uma coluna à esquerda. Essa linha é formada por 0 e as derivadas parciais da equação restrição (ou condição).

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & gx & gy \\ gx & Zxx & Zxy \\ gy & Zyx & Zyy \end{vmatrix}$$

I.C: $Z_{xy} = Z_{yx}$, pois são as derivadas parciais cruzadas.
I.C: gx e gy são as derivadas parciais de x e de y com respeito a equação restrição.

- Análise do Hessiano (C.S)

- Para um máximo: $|\overline{H}_2| > 0; |\overline{H}_3| > 0...;$ (sinais alternados para os hessianos).
- Para um mínimo: $|\overline{H}_2| < 0; |\overline{H}_3| < 0...;$

Exemplo 1: Dada a função $F = x_1 x_2 + 2x_1$, sujeita a condição $4x_1 + 2x_2 = 60$. Utilizar o Método do Multiplicador de Lagrange para identificar o ponto extremo e usar o teste do hessiano para saber se é um ponto de máximo ou de mínimo.

$$F(x_1; x_2; \lambda) = x_1 x_2 + 2x_1 + \lambda(60 - 4x_1 - 2x_2)$$

Condição necessária (Condição de 1ª ordem)

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 + 2 - 4\lambda$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 - 2\lambda$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 60 - 4x_1 - 2x_2$$

$$\begin{cases} x_2 + 2 - 4\lambda = 0 (I) \\ x_1 - 2\lambda = 0 (II) \\ 60 - 4x_1 - 2x_2 = 0 (III) \end{cases}$$

Com respeito a I e II temos:

$$(I) x_2 + 2 - 4\lambda = 0 \Rightarrow x_2 + 2 = 4\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{x_2 + 2}{4}$$

$$(II) x_1 - 2\lambda = 0 \Rightarrow x_1 = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{x_1}{2}$$

$$\lambda = \lambda \therefore \frac{x_1}{2} = \frac{x_2 + 2}{4} \Rightarrow 4x_1 = 2x_2 + 4 \Rightarrow x_1 = \frac{2x_2 + 4}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{x_2 + 2}{2}$$

Substituindo em III:

$$60 - 4x_1 - 2x_2 \Rightarrow 60 - 4\left(\frac{x_2 + 2}{2}\right) - 2x_2 = 0 \Rightarrow 60 - 2x_2 - 4 - 2x_2 = 0$$

$$\Rightarrow -4x_2 = -60 + 4 \Rightarrow x_2 = 14$$

Achando x_1:

$$x_1 = \frac{x_2 + 2}{2} \Rightarrow \frac{14 + 2}{2} = 8$$

Achando λ:

$$\lambda = \frac{x_1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

Condição Suficiente (Condição de 2ª ordem).

Função $F = x_1 x_2 + 2x_1$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 + 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^{\,2}} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^{\,2}} = 0$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 x_2} = 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 x_1} = 1$$

Achando o Hessiano aumentado:

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & gx & gy \\ gx & Zxx & Zxy \\ gy & Zyx & Zyy \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$ Det $|\overline{H}|$ de ordem 3 Aplica-se Sarrus.

Obs: Derivadas Parciais da restrição

$$4x_1 + 2x_2 = 60$$
$$gx = 4 \qquad |\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = |\overline{H}| = 8 + 8]16 > 0$$
$$gy = 2$$

Resposta: é um ponto máximo

3. APLICAÇÃO PRÁTICA EM ECONOMIA [A. P. E]

Exemplo 1: Uma empresa produz dois tipos de equipamentos E_1 e E_2. A função de custo associada à produção é:

$$C = 0{,}5x^2 + 4y^2 - 2xy + 100$$

A capacidade de produção num período é de 13 equipamentos no total. Quantos equipamentos de cada tipo devem ser produzidos no período para minimizar o custo de produção?

Resp: x=10

Ex²: Suponha que *x* unidades de mão de obra e *y* unidades de capital possam produzir $f(x,y) = 60x^{3/4}y^{1/4}$ unidades de certo produto. Suponha também que cada unidade de mão de obra custe R$100, enquanto cada unidade de capital custa R$200. Considere que R$30.000 estão disponíveis para serem gastos com a produção. Quantas unidades de mão de obra e quantas unidades de capital devem ser utilizadas para maximizar a produção?

Solução: O custo de *x* unidades de mão de obra e *y* unidades de capital é igual a $100x + 200y$. Assim, como queremos utilizar todo o dinheiro possível (R$30.000), devemos ter a seguinte equação vínculo satisfeita:

$100x + 200y = 30000$ Ou $g(x,y) = 30000 - 100x - 200y = 0$.

A função a ser minimizada é $f(x,y) = 60x^{3/4}y^{1/4}$. Neste caso, temos.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 45x^{-1/4}y^{1/4} - 100\lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = 15x^{3/4}y^{-3/4} - 200\lambda = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = 30000 - 100x - 200y = 0$$

Resolvendo as duas primeiras equações para λ, obtemos.

$$\lambda = \frac{45}{100}x^{-1/4}y^{1/4} = \frac{9}{20}x^{-1/4}y^{1/4}$$
$$\lambda = \frac{15}{100}x^{3/4}y^{-3/4} = \frac{3}{40}x^{3/4}y^{-3/4}$$

Assim, devemos ter.

$$\frac{9}{20}x^{-1/4}y^{1/4} = \frac{3}{40}x^{3/4}y^{-3/4}$$

Para resolver *y* em termos de *x*, multiplicamos ambos os lados dessa equação por $x^{1/4}y^{3/4}$:

$$\frac{9}{20}y = \frac{3}{40}x$$
$$y = \frac{1}{6}x$$

Inserindo esse resultado em $100x + 200y = 30000$, obtemos

$$100x + 200\left(\frac{1}{6}x\right) = 30000$$
$$\frac{400x}{3} = 30000$$
$$x = 225$$

Portanto,

$$y = \frac{225}{6} = 37{,}5.$$

Assim, o máximo é obtido utilizando 225 unidades de mão de obra e 37,5 unidades de capital.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRAGA, Márcio B.; KANNEBLEY Jr., Sérgio; ORELLANO, Verônica I. F. **Matemática para Economistas**. São Paulo: Atlas, 2003.

CRUM, W. L.; SCHUMPETER, Joseph A. **Elementos de Matemática para Economistas e Estatísticos**. Rio de Janeiro: Editora Fundo de Cultura, 1969.

CHIANG, Alpha C.; WAINWRIGHT, Kelvin**. Matemática para Economistas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.
CHIANG, Alpha. **Matemática para Economistas**. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.
GOLDSTEIN, Larry J.; LAY, David C.; SCHNEIDER, David I. **Matemática Aplicada: economia, administração e contabilidade**. Porto Alegre: Bookman, 2000.
MEDEIROS DA SILVA, Sebastião. **Matemática para os Cursos de Economia, Administração e Ciências Contábei**s. 5. ed. Vol. 2. São Paulo: Atlas, 2008.
SILVA, Luiza Maria Oliveira; MACHADO, Maria Augusta Soares. **Matemática Aplicada à Administração, Economia e Contabilidade**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.
TAN, S. T. **Matemática Aplicada a Administração e Economia**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
ZIL, Dennis G. **Equações Diferenciais**. Vol. 1. 3. ed. São Paulo: Pearson Markron Books, 2001.
ZIL, Dennis G. **Equações Diferenciais**. Vol. 2. 3. ed. São Paulo: Pearson Markron Books, 2001.