OTIMIZAÇÃO NÃO CONDICIONADA

1. OTIMIZAÇÃO NÃO CONDICIONADA: MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

1.1. INTRODUÇÃO

O cálculo de derivadas permite-nos encontrar pontos de máximo e/ou de mínimo de funções, com inúmeras aplicações em economia, como o estudo de uma meta de equilíbrio, no qual o estado de equilíbrio é definido como posição ótima para uma dada unidade econômica (uma família, uma firma ou mesmo a economia global).

1.2. CONDIÇÃO NECESSÁRIA: TESTE DA 1ª DERIVADA

Se *f(x; y)* tem um máximo ou mínimo relativo em *(x;y)=(a;b)* então é porque suas primeiras derivadas são iguais a zero. $\frac{\partial f}{\partial x}(a;b)=0$; $\frac{\partial f}{\partial y}(a;b)=0$

I.C: é a condição necessária que define o ponto extremo.

Exemplo 1: Dada a função $f(x;y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 8x - y + 30$. Encontre o ponto *(a; b)* no qual *f(x; y)* obtém o seu mínimo.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 4y + 8$ →CN: $6x + 4y + 8 = 0$

$6x + 4y = -8$

$4y = -8 - 6x$

$$y = \frac{-8-6x}{4} \qquad \text{(Eq.1)}$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 6y - 1$ → CN: $4x + 6y - 1 = 0$

$4x + 6y = 1$

$6y = 1 - 4x$

$$y = \frac{1-4x}{6} \quad \text{(Eq. 2)}$$

$y = y \rightarrow \frac{-6x-8}{4} = \frac{-4x+1}{6} \rightarrow 6 * (-6x - 8) = 4 * (-4x + 1) \rightarrow -36x - 48 = -16x + 4$

$-36x + 16x = 4 + 48 \rightarrow -20x = 52 \rightarrow x = -\frac{52}{20} \rightarrow x = -\frac{13}{5}$

Se $x = -\frac{13}{5}$, então para encontrar o valor de y basta substituir em na equação 1 ou 2. Substituindo na Eq.2, temos:

$$y = \frac{1-4x}{6} \rightarrow y = \frac{1 - 4 * \left(-\frac{13}{5}\right)}{6} \rightarrow y = \frac{1 + \frac{52}{5}}{6} \rightarrow y = \frac{57}{5} * \frac{1}{6} \rightarrow y = \frac{57}{30} \rightarrow y = \frac{19}{10}$$

Assim: $(x, y) = \left(-\frac{13}{5}; \frac{19}{10}\right)$.

Exemplo 2: Encontre o ponto $(x; y)$ onde $f(x; y)$tem um ponto extremo máximo ou mínimo. Sendo $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + 4x + 6y + 8$.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4 \rightarrow CN: 2x + 4 = 0$

$2x = -4$

$x = -2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -6y + 6 \rightarrow CN: -6y + 6 = 0$

$-6y = -6$

$y = 1$

Depois de encontrado o valor de x e y. Temos que:

$(x; y) = (-2;1)$

1.3. CONDIÇÃO SUFICIENTE: TESTE DA 2ª DERIVADA

$$D(x; y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} . \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$$

- Casos:

1. Mínimo Relativo

$D(a;b) > 0$

$D(x;y) > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$

2. Máximo Relativo

$D(a;b) > 0$

$D(x;y) > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$

3. Ponto Sela

$D(a;b) < 0$

$D(x;y) < 0$

4. Nenhuma conclusão pode ser obtida

$D(a;b) = 0$

$D(x;y) = 0$

Exemplo 1: Determine o ponto *(x; y)* correspondente ao extremo relativo e identifique através da natureza do teste da 2ª derivada se o ponto é máximo ou mínimo.

$f(x;y) = -2x^2 + 2xy - y^2 + 4x - 6y + 5$

Condição Necessária: teste da 1ª derivada.

$\frac{\partial f}{\partial x} = -4x + 2y + 4$

$-4x + 2y + 4 = 0 \rightarrow 2y = -4 + 4x \rightarrow y = \frac{4x-4}{2} \rightarrow y = 2x - 2$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y - 6$

$2x - 2y - 6 = 0 \rightarrow -2y = 6 - 2x \rightarrow y = \frac{2x-6}{2} \rightarrow y = x - 3$

Assim:

$y = y \rightarrow 2x - 2 = x - 3 \rightarrow 2x - x = 2 - 3 \rightarrow x = -1$

Se $x = -1$,então:

$y = 2x - 2 \rightarrow y = 2 * (-1) - 2 \rightarrow y = -2 - 2 \rightarrow y = -4$

Então o ponto *(x; y) = (-1; -4).*

Condição Suficiente: teste da 2ª derivada.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

$$D(x;y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 =$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$$

$$(-4) * (-2) - (2^2) = 8 - 4 = 4 > 0$$

$$D(x;y) > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 < 0$$

Resposta: Depois de analisada todas as condições, temos que a função tem um máximo relativo.

Exemplo 2: Determine o ponto *(x; y)* correspondente ao extremo relativo e identifique através da natureza do teste da 2ª derivada se o ponto é máximo ou mínimo.

$$f(x;y) = x^2 + 2xy + 5y^2 + 2x + 10y - 3$$

Condição Necessária: teste da 1ª derivada.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y + 2$$

$$2x + 2y + 2 = 0 \rightarrow 2y = -2x - 2 \rightarrow y = \frac{-2x-2}{2} \rightarrow y = -x - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 10y + 10$$

$$2x + 10y + 10 = 0 \rightarrow 10y = -2x - 10 \rightarrow y = \frac{-2x-10}{10}$$

Assim,

$$y = y \rightarrow -x - 1 = \frac{-2x-10}{10} \rightarrow 10 * (-x - 1) = -2x - 10 \rightarrow -10x - 10 = -2x - 10 \rightarrow -8x = 0 \rightarrow x = 0$$

Como $x = 0$ então:

$y = -x - 1 \rightarrow y = 0 - 1 \rightarrow y = -1$

Então o ponto é *(x; y) = (0; -1)*

Condição Suficiente: teste da 2ª derivada.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 10$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$

$D(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = (2) * (10) - (2^2) = 20 - 4 = 16$

$D(x,y) = 16 > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$

Resposta: Depois de analisada todas as condições, temos que a função tem um mínimo relativo.

2. APLICAÇÃO PRÁTICA EM ECONOMIA [A. P. E]

O critério de seleção mais comumente usado em Economia é baseado na meta de maximização de alguma coisa (tal como a maximização dos lucros de uma firma, da utilidade do consumidor, ou da taxa de crescimento de uma firma ou de uma economia nacional) ou na minimização (tal como a minimização do custo de produzir um dado nível de produção).

Exemplo 1: Suponhamos que:

$$R(Q) = 1000Q - 2Q^2$$
$$C(Q) = Q^3 - 59Q^2 + 1315Q + 2000$$

Portanto,

$\pi = R - C = -Q^3 + 57Q^2 - 315Q - 2000$

Onde R, C e π são todos medidos em reais, enquanto Q é em, digamos, toneladas por semana.

Esta função lucro possui dois valores críticos, pois

$$\frac{d\pi}{dQ} = -3Q^2 + 114Q - 315 = 0 \text{ quando } Q = \begin{cases} 3 \\ 35 \end{cases}$$

Mas, já que a derivada segunda é

$$\frac{d^2\pi}{d^2Q^2} = -6Q + 114 \qquad \begin{cases} > 0 \text{ quando } Q = 3 \\ < 0 \text{ quando } Q = 35 \end{cases}$$

O nível de produção de 35(toneladas por semana) é o único que maximiza o lucro.
A substituição de valor Q=35 na função lucro revela que o lucro máximo é R$ 13.925,00 por semana no presente caso.

1. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRAGA, Márcio B.; KANNEBLEY Jr., Sérgio; ORELLANO, Verônica I. F. **Matemática para Economistas**. São Paulo: Atlas, 2003.
CRUM, W. L.; SCHUMPETER, Joseph A. **Elementos de Matemática para Economistas e Estatísticos**. Rio de Janeiro: Editora Fundo de Cultura, 1969.
CHIANG, Alpha C.; WAINWRIGHT, Kelvin**. Matemática para Economistas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.
CHIANG, Alpha. **Matemática para Economistas**. São Paulo: McGraw-Hill, 1982.
GOLDSTEIN, Larry J.; LAY, David C.; SCHNEIDER, David I. **Matemática Aplicada: economia, administração e contabilidade**. Porto Alegre: Bookman, 2000.
MEDEIROS DA SILVA, Sebastião. **Matemática para os Cursos de Economia, Administração e Ciências Contábei**s. 5. ed. Vol. 2. São Paulo: Atlas, 2008.
SILVA, Luiza Maria Oliveira; MACHADO, Maria Augusta Soares. **Matemática Aplicada à Administração, Economia e Contabilidade**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.
TAN, S. T. **Matemática Aplicada a Administração e Economia**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
ZIL, Dennis G. **Equações Diferenciais**. Vol. 1. 3. ed. São Paulo: Pearson Markron Books, 2001.
ZIL, Dennis G. **Equações Diferenciais**. Vol. 2. 3. ed. São Paulo: Pearson Markron Books, 2001.